векторы $\vec{e}_{n+i}$ репера R^{x_2} возьмем ортами. Тогда имеем:

$$\omega_i^k = a_{ij}^k\,\omega^j, \quad \bar{\omega}_i^k = \bar{a}_{ij}^k\,\omega^j, \quad \bar{\omega}_i^i = 0, \quad \theta_i^k = t_{ij}^k\,\theta^j. \qquad (14)$$

Допустим, что семейство θ^1 $(\theta^{\mathfrak{J}}=0,\ \mathfrak{J}\neq 1)$ линий сети σ_p^* на графике V_p^* состоит из геодезических I рода. Тогда по теореме I семейство $\bar{\omega}^1$ линий сети $\bar{\sigma}_p$ состоит из прямых. Нетрудно убедиться, что $\bar{V}_p$ представляет собой линейчатую поверхность, которая становится цилиндрической с образующими вдоль вектора $\vec{e}_{n+1}$ при условии $\bar{b}_{\mathfrak{J}1}^a = 0\ (\mathfrak{J}\neq 1)$, т.е. когда поле $\vec{e}_{n+1}$ обладает сопряженным и ортогональным ему полем $(p-1)$-направлений на поверхности $\bar{V}_p$.

Можно показать, что если p_1 $(1<p_1<p)$ семейств θ^{i_1} линий сети $\sigma_p^* \subset V_p^*$ состоит из геодезических I рода и подсеть $\bar{\sigma}_{p_1} \subset \bar{\sigma}_p$ сопряжена на $\bar{V}_p$ $(\bar{b}_{i_1 j_1}^a = 0;\ i_1, j_1 = \overline{1, p_1})$, то $\bar{V}_p$ является тангенциально вырожденной поверхностью ранга $p-p_1$ при условии, что p_1-мерное поле $[\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+p_1}]$ направлений на $\bar{V}_p$, определяемое касательными к линиям подсети $\bar{\sigma}_{p_1}$, обладает сопряженным ему полем $(p-p_1)$-направлений $(\bar{b}_{i_1 i_2}^a = 0;\ i_2 = \overline{p_1+1, p})$. Аналогичные утверждения формулируются для геодезических II рода.

3. В нормальных расслоениях $N(V_p), N(\bar{V}_p), N(V_p^*)$ могут быть определены нормальные связности [2] $\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^*$ соответственно с формами $\omega_b^a, \bar{\omega}_b^a, \theta_B^A$ и тензорами $R_{bij}^a, \bar{R}_{bij}^a, R_{Bij}^{*A}$.

При фиксации нормального векторного поля $\vec{e}_{p+1}$ в расслоении $N(V_p)$ в силу равенств (I) фиксируется векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ в расслоении $N(V_p^*)$. Значит, формы ω_{p+1}^a, θ_{p+1}^a и θ_{p+1}^{n+j} соответственно главные:

$$\omega_{p+1}^a = \lambda_k^a\,\omega^k \quad (\lambda_k^{p+1} \equiv 0), \qquad (15)$$

$$\theta_{p+1}^a = \Lambda_k^a\,\theta^k \quad (\Lambda_k^a = \lambda_k^a), \qquad \theta_{p+1}^{n+j} = \Lambda_k^{n+j}\,\theta^k. \qquad (16)$$

В силу соотношений (9), (10), (13) получаем: $\Lambda_k^{n+j} = -\bar{g}^{ij}\,t_{ik}^{p+1}$.
С помощью соотношений (8)-(10) доказывается

Т е о р е м а 2. Векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ параллельно по любому направлению в связности $\mathcal{D}^*$ в том и только в том случае, если локально график V_p^* принадлежит гиперплоскости E_{2n-1}, ортогональной к вектору $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ в E_{2n}. При этом локально поверхность V_p лежит в гиперплоскости E_{n-1}, ортогональной к вектору $\vec{e}_{p+1}$ в E_n.

В случае, описываемом теоремой 2, продолжение систем уравнений (15) и (16) соответственно дает выражения для компонентов

тензоров кривизны связностей $\mathcal{D}, \mathcal{D}^*$:

$$R_{p+1\,ij}^a = 0, \quad R_{p+1\,ij}^{*a} = 0, \quad R_{p+1\,ij}^{*n+k} = -R_{n+k\,ij}^{*p+1} = 0.$$

Аналогичную теорему можно сформулировать для фиксированного нормального поля $\vec{e}_{n+p+1}$ в расслоении $N(\bar{V}_p)$ и соответствующего ему векторного поля $\vec{\mathcal{E}}_{n+p+1}$ в расслоении $N(V_p^*)$.

4. Отнесем область $\Omega \subset V_p$ к основанию отображения σ_p и векторы $\vec{e}_i$ репера R^{x_1} возьмем ортами. Тогда

$$\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} = g_{ij} = \bar{g}_{ij} = 0 \quad (i\neq j), \quad \gamma_{ii} = 1. \qquad (17)$$

Пусть векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{n+1}$ параллельно в связности $\mathcal{D}^*$ по любому направлению. Значит, во всякой точке $x \in V_p^*$ имеем:

$$\theta_{n+1}^a = 0, \quad \theta_{n+1}^{n+j} = 0; \quad \theta_{n+1}^{n+a} = 0. \qquad (18)$$

Продолжение системы (18) приводит к выражениям для компонентов тензоров кривизны связности $\mathcal{D}^*$:

$$R_{n+1\,ij}^{*a} = -R_{aij}^{*n+1} = 0, \quad R_{n+1\,ij}^{*n+k} = 0, \quad R_{n+1\,ij}^{*n+a} = -R_{n+a\,ij}^{*n+1} = 0.$$

Можно показать, что в этом случае векторы $\vec{e}_{n+1}$, $\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_{n+1}$ имеют постоянные длины, поверхности V_p и $\bar{V}_p$ — развертывающиеся с прямолинейными образующими вдоль векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_{n+1}$ соответственно. График V_p^* представляет собой линейчатую поверхность, описываемую касательной к линии θ^1 сети σ_p^*.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств//Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1970.№374.С.41-51.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространствах постоянной кривизны//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,Т.12. С.3-30.

УДК 514.76

ПРИЛОЖЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ИХ ИНВАРИАНТНЫХ НОРМАЛИЗАЦИЙ

А.В.С т о л я р о в
(Чувашский пед.ин-т)

В работах [1],[2] автором в разных дифференциальных окрестностях приведены примеры построения полей инвариантных двойственных нормалей регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H}$ m-мерных линейных элементов $(m < n-1)$ и регулярного распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов, причем оба многообразия $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ погружены в n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$; исходной предпосылкой этого являются результаты, доказанные нами в работах [1], [3]: распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($\mathcal{M} \subset P_{n,n}$) во 2-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования $J: \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} \to \overline{\omega}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}$ ($\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{0,n}$) форм проективной связности по закону (I), а также многообразие $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ ($\overline{\mathcal{M}} \subset \overline{P}_{n,n}$), двойственное исходному.

В случае $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ формы $\overline{\omega}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}$ связности пространства $\overline{P}_{n,n}$ имеют вид (см. [1]):

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left.
\begin{aligned}
&\overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \overline{\omega}^n_n = \omega^n_n - \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0,\\
&\overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{j\alpha}\,\omega^{\alpha}_0, \quad \overline{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\,\omega^k_n, \quad \overline{\omega}^n_0 = \omega^n_0,\\
&\overline{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\,\omega^k_0, \quad \overline{\omega}^0_n = \omega^0_n, \quad \overline{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n\,\omega^0_k,\\
&\overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + [\Lambda^{js}_n \Lambda^n_{si\mathcal{K}} - \delta^j_i \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})]\,\omega^{\mathcal{K}}_0;
\end{aligned}
\right\} \text{(a)}\\
&\left.
\begin{aligned}
&\overline{\omega}^v_0 = \omega^v_0 + A^n_{un} A^{vu}_n\,\omega^n_0, \quad \overline{\omega}^v_i = -\Lambda^n_{ki} A^{vu}_n\,\omega^k_u,\\
&\overline{\omega}^v_n = -A^{vu}_n\,\omega^0_u, \quad \overline{\omega}^0_v = A^n_{uv}\,\omega^u_n,\\
&\overline{\omega}^i_v = -A^n_{uv}\Lambda^{ik}_n\,\omega^u_k, \quad \overline{\omega}^n_v = -A^n_{uv}\,\omega^u_0,\\
&\overline{\omega}^w_v = \omega^w_v + [A^{wu}_n A^n_{uv\mathcal{K}} - \delta^w_v \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})]\,\omega^{\mathcal{K}}_0;
\end{aligned}
\right\} \text{(б)}
\end{aligned}
\right.
\tag{I}
$$

здесь $\Lambda^n_{ij}, \Lambda^{ij}_n$ – основные взаимные тензоры I-го порядка распределения и $i,j,k,\ell,s = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{m+1,n-1}$; $\alpha = \overline{m,n}$; $\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = \overline{1,n}$. В случае $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ в соотношениях (I) отсутствуют выражения (I-б) и $m = n-1$.

В работах [1]-[3] нами доказано следующее утверждение: зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν^i_n (ν^0_i) распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ (или $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$) строим охват квазитензора $\overline{\nu}^i_n$ ($\overline{\nu}^0_i$) двойственного образа $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ (или $\overline{\mathcal{M}} \subset \overline{P}_{n,n}$), аналогичный охвату ν^i_n (ν^0_i), после чего по закону

$$
\overline{\nu}^i_n = -\Lambda^{ik}_n \nu^0_k, \quad \overline{\nu}^0_i = \Lambda^n_{ki} \nu^k_n \tag{2}
$$

найдем соответствующую двойственную нормаль ν^0_i (ν^i_n).

Ниже приведем примеры построения полей инвариантных двойственных нормалей распределений $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ описанным выше способом.

П р и м е р I. Согласно работе [4], нормаль Михэйлеску I-го рода распределения $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ определяется охватом

$$
\begin{aligned}
\overline{M}^{\ell}_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(m+2)} \overline{\Lambda}^{\ell i}_n \overline{a}^{jk}_n [\overline{\Lambda}^n_{ijk} + \overline{\Lambda}^n_{ij}(\overline{\Lambda}^n_{kn} + \overline{\Lambda}^n_{kv}\overline{a}^v_n) +\\
+ \overline{\Lambda}^n_{ik}(\overline{\Lambda}^n_{jn} + \overline{\Lambda}^n_{jv}\overline{a}^v_n) + \overline{\Lambda}^n_{kj}(\overline{\Lambda}^n_{in} + \overline{\Lambda}^n_{iv}\overline{a}^v_n)];
\end{aligned}
\tag{3}
$$

после замены функций с черточкой через компоненты полей объектов распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
\overline{M}^{\ell}_n = -\frac{1}{2(m+2)} [a^{sk}_n \Lambda^{\ell t}_n \Lambda^n_{tsk} - (2a^{\ell k}_n \Lambda^n_{tk} \Lambda^{ts}_n + m\Lambda^{\ell s}_n) \times\\
\times (\Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n A^n_{wn} + \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n a^0_w)].
\end{aligned}
$$

Теперь из $\overline{M}^{\ell}_n = -\Lambda^{\ell j}_n M^0_j$ (см. (2)) находим поле квазитензора M^0_j, определяющее поле нормалей Михэйлеску второго рода распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и являющееся двойственным полю M^i_n:

$$
\begin{aligned}
M^0_i = \frac{1}{2(m+2)} [a^{sk}_0 \Lambda^n_{isk} - (2\Lambda^n_{i\ell} a^{\ell k}_n \Lambda^n_{tk} \Lambda^{ts}_n + m\delta^s_i) \times\\
\times (\Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n A^n_{wn} + \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n a^0_w)].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} компоненты полей нормалей Михэйлеску имеют следующие строения:

$$
\left\{
\begin{aligned}
M^{\ell}_n &= -\frac{1}{2(m+2)} [\Lambda^{\ell k}_n b_k + (m+2)\Lambda^{\ell k}_n (\Lambda^n_{kn} + \Lambda^n_{kv} a^v_n)],\\
M^0_i &= \frac{1}{2(m+2)} \{b_i - (m+2)[\Lambda^n_{in} - \Lambda^n_{iv} A^{vu}_n (A^n_{un} - a^0_u)]\}.
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

Так как условием взаимности нормализации $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$ распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (см. [4])

$$
2x^0x^n = a^n_{ij}x^ix^j + \frac{2b_i}{m+2}x^ix^n + B^n_{uv}x^ux^v + 2b_vx^vx^n + T_n(x^n)^2 \tag{6}
$$

является выполнение соотношений

$$
b_k = (m+2)(\nu^0_k - a^n_{ks}\nu^s_n), \tag{7}
$$

то в случае $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ нормализация Михэйлеску, определяемая полями двойственных нормалей (5),взаимна тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $T^n_k \overset{def}{=} \Lambda^n_{kv}[a^v_n + A^{vu}_n(A^n_{un} - a^o_u)]$; в частности,этот тензор обращается в нуль для взаимного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($\Lambda^n_{kv} \equiv 0$).

Отметим,что в случае распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ гиперплоскостных элементов поле нормалей Михэйлеску второго рода M^o_i, двойственное поле M^i_n ,получено в работе [2].

П р и м е р 2. Согласно работе [5],компоненты поля нормалей первого рода H^i_n распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ определяются во 2-й дифференциальной окрестности и имеют строение

$$H^i_n = -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [\Lambda_k + (n+1)\Lambda^n_{kn}], \quad \Lambda_k = \Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{ijk}. \tag{8}$$

Следовательно,имеем $\bar{H}^i_n = -\frac{1}{2(n+1)} \bar{a}^{ik}_n [\bar{\Lambda}_k + (n+1)\bar{\Lambda}^n_{kn}]$, откуда находим $\bar{H}^i_n = \frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [(n+1)\Lambda^n_{sk}\Lambda^n_{en}\Lambda^{se}_n - \Lambda_k]$; из $\bar{H}^i_n = -\Lambda^{ik}_n H^o_k$ (см. (2)) получим нормаль 2-го рода H^o_i ,двойственную по отношению H^i_n:

$$H^o_i = \frac{1}{2(n+1)} \Lambda^n_{is} a^{sk}_n [\Lambda_k - (n+1)\Lambda^n_{tk}\Lambda^n_{en}\Lambda^{te}_n]. \tag{9}$$

Если $\Lambda^n_{[ij]} = 0$,то из (8),(9) следует $H^i_n = -\frac{1}{2(n+1)}\Lambda^{ik}_n[\Lambda_k + (n+1)\Lambda^n_{kn}]$, $H^o_i = \frac{1}{2(n+1)}[\Lambda_i - (n+1)\Lambda^n_{in}]$; при этом нормализация $\{H^i_n, H^o_i\}$ распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ является взаимной тогда и только тогда, когда квазинормали Λ_i и $\mathcal{B}_i$ совпадают,т.е. когда она представляет собой нормализацию Михэйлеску.

З а м е ч а н и е. В случае пространств $P_{n,n}$ и $\bar{P}_{n,n}$ без кручения при $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ имеем $\Lambda_i = \mathcal{B}_i$.

П р и м е р 3. Поле квазитензора 2-го порядка

$$S^i_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [a^{st}_n a^n_{stk} + (n+1)\Lambda^n_{kn}]$$

определяет поле нормалей первого рода распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$. Так как

$$\bar{S}^i_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(n+1)} \bar{a}^{ik}_n [\bar{a}^{st}_n \bar{a}^n_{stk} + (n+1)\bar{\Lambda}^n_{kn}] =$$
$$= -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n \Lambda^{ej}_n [a^{st}_n \Lambda^n_{es}\Lambda^n_{jtk} - (n+1)\Lambda^n_{ek}\Lambda^n_{jn}],$$

то нормаль 2-го рода S^o_i ,двойственная S^i_n ,имеет следующее строение:

$$S^o_i = \frac{1}{2(n+1)} \Lambda^n_{ip} a^{pk}_n \Lambda^{et}_n [a^{sj}_n \Lambda^n_{es}\Lambda^n_{tjk} - (n+1)\Lambda^n_{ek}\Lambda^n_{tn}].$$

Отметим,что в случае $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ справедливо $S^i_n = H^i_n$, $S^o_i = H^o_i$.
Две инвариантные внутренним образом определенные двойственные нормализации в каждом центре A_o распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ определяют однопараметрический пучок инвариантных нормалей первого рода с вершиной в точке A_o и двойственный однопараметрический пучок нормалей второго рода с $(n-3)$-мерной вершиной в текущей плоскости Π_{n-1} элемента многообразия $\mathcal{M}$.Например, если в случае распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} в качестве исходных нормализаций взять нормализации Фубини F^i_n и Вильчинского W^i_n (см. 2),то в 3-й дифференциальной окрестности пучки инвариантных нормалей первого и второго родов определяются,соответственно,пучками квазитензоров $\nu^i_n(\tau) = \tau F^i_n + (\tau - 1) W^i_n$, $\nu^o_i(\tau) = \tau F^o_i - (\tau - 1) W^o_i$,где τ – инвариантный параметр. Уравнения $(n-3)$-мерной вершины нормалей $\nu^o_i(\tau)$ относительно репера 0-го порядка $\{A_{\bar{J}}\}$ имеют вид:

$$(\Lambda^n_{ij} F^j_n + \frac{\mathcal{B}_i}{n+1}) x^i - x^o = 0, \quad \Lambda^n_{ij}(F^j_n + W^j_n) x^i = 0, \quad x^n = 0.$$

Следовательно,($n-3$)-мерная вершина есть пересечение трех гиперплоскостей,а именно, ξ_o , $(F^i_n + \Lambda^{ij}_n \frac{\mathcal{B}_j}{n+1})\xi_i - \xi_n$, $(F^i_n + W^i_n)\xi_i$; гиперплоскости $\xi_{\bar{J}}$ имеют строение

$$\xi_o = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}}[A_o A_1 \ldots A_{n-1}], \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}}[A_n A_1 \ldots A_{n-1}],$$
$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}} \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda^n_{ji} [A_o A_1 \ldots A_{j-1} A_n A_{j+1} \ldots A_{n-1}].$$

Библиографический список

I.С т о л я р о в А.В. Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, I982.Вып.I3.С.95-I02.

2.С т о л я р о в А.В. Двойственная геометрия оснащенного распределения гиперплоскостных элементов//Чуваш.гос.пед.ин-т. Чебоксары,I982.38с. Деп. в ВИНИТИ,№ 6454.

3.С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности//Тез.докл.7-й Всес.конф.по современным проблемам геометрии.Минск.I979.С.I92.

4.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,I975.Т.7.

5.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ. М.,I973.Т.4.С.7I-I20.